الدوال الأسيّة

السلسلة 1

التمرين الأول :

في الشكل أسفله (C_f) هو التمثيل المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ لدالة عددية f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

علما أن (C_f) يقبل :

- فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$
- محور الأراتيب مقاربا عموديا
- المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x$ مقاربا مائلا بجوار $+\infty$

(أنظر الشكل)

من خلال قراءتك للمبيان :

1. أ. حدد النهايات التالية :

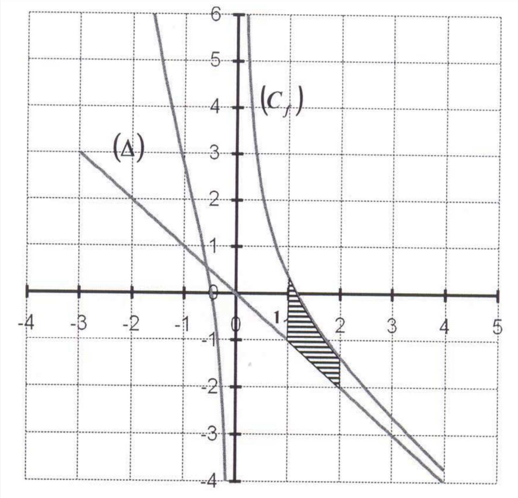
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) \text{ و } \lim_{x\to -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x\to +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x\to +\infty} (f(x)+x)$$

ب. اعط جدول تغيرات f على مجموعة تعريفها

ج. اعط إشارة $f(x)+x$ على المجال $]0,+\infty[$

د. اعط عدد حلول المعادلة $f(x)=-x$ على $\mathbb{R}^*$

2. أحسب مساحة الحيز المخدش في المبيان إذا علمت أن $f(x)=e^{-x}-x+\dfrac{1}{x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$



التمرين الثاني :

الجزء الأول

نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $g(x) = -xe^{-x} + 1$

1) أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم اعط جدول تغيرات الدالة g
2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = x - 1 + (x+1)e^{-x}$.

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
ب- بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (يمكنك وضع $t = -x$)
2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$
3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)
4) أ- بين أن $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
ب- اعط جدول تغيرات الدالة f
5) أدرس تقعر المنحنى (C_f) محددا نقط انعطافه
6) أ- حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0
ب- أنشئ (T) و (C_f) (نأخذ $e^{-1} \simeq 0{,}36$)
7) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب $\int_0^2 (x+1)e^{-x}\,dx$
ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمات اللذين معادلاتهم : $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 2$

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1) بين أن $0 \le u_n \le 1$ لكل n من $\mathbb{N}$
2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية
3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=2x+\frac{e^x}{e^x-1}$. وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) حدد D_f
2) أحسب نهايات f عند محدات D_f
3) أدرس تغيرات f و اعط جدول تغيراتها
4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)
5) بين أن النقطة $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)
6) أنشئ (C_f)
7) أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\ln 2$ و $x=1$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$. و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم
$(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة القياس $4cm$)

الجزء الأول

لتكن الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=x+2-e^x$

1) أدرس تغيرات g على $[0,+\infty[$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0,+\infty[$
ب- تحقق أن $1,14<\alpha<1,15$
3) أدرس إشارة $g(x)$ على $[0,+\infty[$

الجزء الثاني

1) أ- بين أن لكل x من $[0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$
ب- استنتج تغيرات f على $[0,+\infty[$
2) أ- بين أن لكل $x\geq 0$: $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$
ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة
3) أ- بين أن $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$
ب- اعط تأطيرا ل $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}
4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0

5) أ- بين أن لكل x من $[0,+\infty[$: $f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}$ حيث $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$

ب- أدرس تغيرات الدالة u على $[0,+\infty[$ و استنتج إشارة $u(x)$ على $[0,+\infty[$

ج- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)

6) أنشئ (C_f) و (T)

الجزء الثالث

1) حدد دالة أصلية ل f على $[0,+\infty[$ (يمكنك استعمال الجزء الثاني السؤال 2))

2) نرمز ب $\mathcal{D}$ الحيز المحصور بين (C_f) و (T) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

أحسب ب cm^2 المساحة $\mathcal{A}$ للحيز $\mathcal{D}$

3) لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع $v_n=\int_{n}^{n+1}f(x)dx$

أ- أحسب v_0 ، v_1 و v_2

ب- أول هندسيا v_n

ج- بين أن لكل $n\geq 2$: $f(n+1)\leq\int_{n}^{n+1}f(x)dx\leq f(n)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

التمرين الخامس :

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=e^{x}-2x+2$

1) أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

2) أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- أدرس تغيرات g و استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{2}x+1+xe^{-x}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$)

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا يتم تحديد اتجاهه بجوار $-\infty$

ب-أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y=\frac{1}{2}x+1$ مقارب مائل للمنحنى بجوار $+\infty$

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)

2) بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{2e^{x}}$ لكل x من $\mathbb{R}$ و استنتج أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

3) أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $]-1,0[$ بحيث $f(\alpha)=0$

ب- حدد معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 0.

ج- بين أن : $f''(x)=\frac{x-2}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم حدد زوج إحداثيتي I نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

4) أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $2e^{-2}\simeq 0,27$ و $\ln 2\simeq 0,7$)

5) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2 xe^{-x}dx=1-\frac{3}{e^2}$

6) احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ و $x=2$.